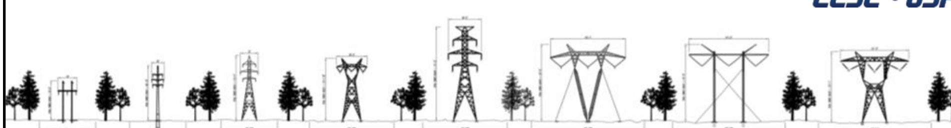
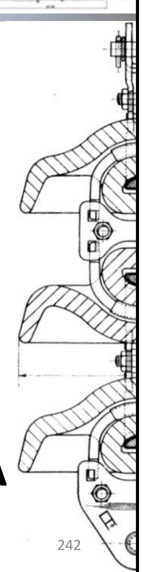
SEL0365 – Linhas de Transmissão de Energia Elétrica

Departamento de Engenharia Elétrica e de Computação
Escola de Engenharia de São Carlos
Universidade de São Paulo
Prof. Rogério Andrade Flauzino





SEL0365 – Linhas de Transmissão de Energia Elétrica
Departamento de Engenharia Elétrica e de Computação
Escola de Engenharia de São Carlos
Universidade de São Paulo
Prof. Rogério Andrade Flauzino

CAPÍTULO 4
CÁLCULOS ENVOLVENDO LINHAS DE TRANSMISSÃO DE ENERGIA ELÉTRICA

242

EESC • USP

Relação Entre Tensões e Correntes

- No capítulo anterior delineamos as equações gerais de linhas de transmissão as quais podem ser enunciadas da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \dot{U}_x = \dfrac{\dot{U}_2 + \dot{I}_2\sqrt{Z/Y}}{2} e^{x\sqrt{YZ}} + \dfrac{\dot{U}_2 - \dot{I}_2\sqrt{Z/Y}}{2} e^{-x\sqrt{YZ}} \\ \dot{I}_x = \dfrac{\dot{U}_2 + \dot{I}_2\sqrt{Z/Y}}{2\sqrt{Z/Y}} e^{x\sqrt{YZ}} - \dfrac{\dot{U}_2 - \dot{I}_2\sqrt{Z/Y}}{2\sqrt{Z/Y}} e^{-x\sqrt{YZ}} \end{cases}$$

243

EESC • USP

Relação Entre Tensões e Correntes

- O objetivo, contudo, é de relacionar as grandezas elétricas nas terminações da linha, ou seja, tensões e correntes no terminal fonte (transmissor) e no terminal carga (receptor).
- Considerando uma linha com comprimento l, tem-se:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dfrac{\dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z_c}{2} e^{l\gamma} + \dfrac{\dot{U}_2 - \dot{I}_2 Z_c}{2} e^{-l\gamma} \\ \dot{I}_1 = \dfrac{\dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z_c}{2Z_c} e^{l\gamma} - \dfrac{\dot{U}_2 - \dot{I}_2 Z_c}{2Z_c} e^{-l\gamma} \end{cases}$$

244

EESC • USP

Relação Entre Tensões e Correntes

- As equações anteriores podem ser manipuladas algebricamente resultando em:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{U}_2\left(\dfrac{e^{l\gamma}+e^{-l\gamma}}{2}\right)+\dot{I}_2 Z_c\left(\dfrac{e^{l\gamma}-e^{-l\gamma}}{2}\right) \\ \dot{I}_1 = \dfrac{\dot{U}_2}{Z_c}\left(\dfrac{e^{l\gamma}-e^{-l\gamma}}{2}\right)+\dot{I}_2\left(\dfrac{e^{l\gamma}+e^{-l\gamma}}{2}\right) \end{cases}$$

245

EESC • USP

Relação Entre Tensões e Correntes

- Lembrando que: $\cosh(a) = (e^{a} + e^{-a})/2$ e $\sinh(a) = (e^{a} - e^{-a})/2$, tem-se:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{U}_2 \cosh(l\gamma)+\dot{I}_2 Z_c \,\mathrm{senh}(l\gamma) \\ \dot{I}_1 = \dfrac{\dot{U}_2}{Z_c}\mathrm{senh}(l\gamma)+\dot{I}_2\cosh(l\gamma) \end{cases}$$

246

EESC • USP

Relação Entre Tensões e Correntes

- O termo $l\gamma$ pode ser escrito da seguinte forma:
  - $l\gamma = l\sqrt{zy} = \sqrt{lzly} = \sqrt{ZY}$
- Onde Z é a impedância série total da linha e Y é a admitância *shunt* total da linha ambas as quantidades na frequência de interesse.

247

EESC • USP

Relação Entre Tensões e Correntes

- Portanto:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{U}_2 \cosh\left(\sqrt{ZY}\right) + \dot{I}_2 Z_c \operatorname{senh}\left(\sqrt{ZY}\right) \\ \dot{I}_1 = \dfrac{\dot{U}_2}{Z_c} \operatorname{senh}\left(\sqrt{ZY}\right) + \dot{I}_2 \cosh\left(\sqrt{ZY}\right) \end{cases}$$

248

EESC • USP

Relação Entre Tensões e Correntes

- Na forma matricial, tem-se a representação da linha por meio de seus parâmetros de transmissão (Parâmetros de quadripolos)

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\left(\sqrt{ZY}\right) & Z_c \,\mathrm{senh}\left(\sqrt{ZY}\right) \\ \mathrm{senh}\left(\sqrt{ZY}\right)/Z_c & \cosh\left(\sqrt{ZY}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix}$$

249

EESC • USP

Relação Entre Tensões e Correntes

- Uma particularidade das funções hiperbólicas é a possibilidade de sua expansão em séries.

$$\begin{cases} \cosh(l\gamma) = 1 + \dfrac{\left(\sqrt{ZY}\right)^2}{2!} + \dfrac{\left(\sqrt{ZY}\right)^4}{4!} + \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{\left(\sqrt{ZY}\right)^{2n}}{(2n)!} \\ \sinh(l\gamma) = \sqrt{ZY} + \dfrac{\left(\sqrt{ZY}\right)^3}{3!} + \dfrac{\left(\sqrt{ZY}\right)^5}{5!} + \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{\left(\sqrt{ZY}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{cases}$$

- Em função do fatorial no denominador essas séries rapidamente convergem.

250

EESC • USP

Linhas Curtas

- As séries hiperbólicas vão convergir mais rapidamente quanto menor for o comprimento da linha e, consequentemente, menor for o numerador e cada fração.
- Para linhas onde o primeiro termo das séries já é capaz de fornecer uma boa aproximação tem-se a denominação de “Linha curta”.

251

EESC • USP

Linhas Curtas

- Nesse caso as equações de linha poderão ser escritas da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z_c \sqrt{ZY} \\ \dot{I}_1 = \dfrac{\dot{U}_2}{Z_c}\sqrt{ZY} + \dot{I}_2 \end{cases}$$

252

Linhas Curtas

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{U}_2 + \dot{I}_2 \sqrt{\dfrac{Z}{Y}} \sqrt{ZY} \\ \dot{I}_1 = \dot{U}_2 \sqrt{\dfrac{Y}{Z}} \sqrt{ZY} + \dot{I}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z \\ \dot{I}_1 = \dot{U}_2 Y + \dot{I}_2 \end{cases}$$

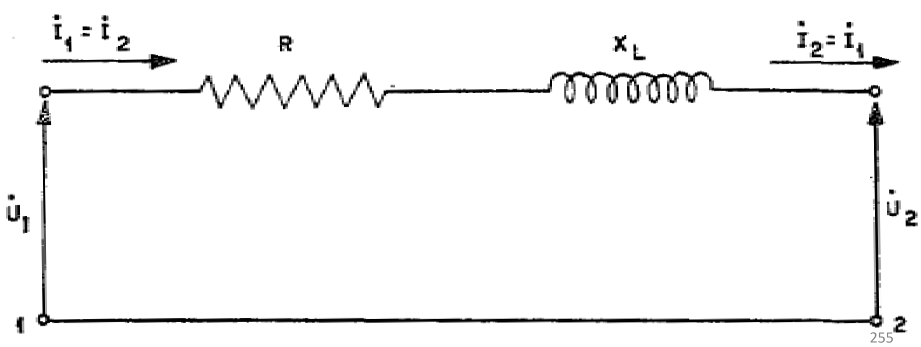
Linhas Curtas

- Em linhas curtas práticas e à frequência nominal de 60 Hz (ou 50 Hz) a parcela de corrente $\dot{U}_2 Y$ é muito pequena, o que resulta no seguinte conjunto de equações:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z \\ \dot{I}_1 = \dot{I}_2 \end{cases}$$

Linhas Curtas

- O conjunto de equações anterior pode ser representado por meio do seguinte circuito equivalente:



Linhas Médias

- Quando se faz necessário o uso dos dois primeiros termos da expansão das funções hiperbólicas para se representar o relacionamento entre as grandezas elétricas nos terminais da linha tem-se o modelo de linhas médias.

Linhas Médias

- Substituindo os dois primeiros termos das expansões das funções hiperbólicas nas equações de linhas, tem-se:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{U}_2 \left(1 + \dfrac{\left(\sqrt{ZY}\right)^2}{2!} \right) + \dot{I}_2 Z_c \left(\sqrt{ZY} + \dfrac{\left(\sqrt{ZY}\right)^3}{3!} \right) \\ \dot{I}_1 = \dfrac{\dot{U}_2}{Z_c} \left(\sqrt{ZY} + \dfrac{\left(\sqrt{ZY}\right)^3}{3!} \right) + \dot{I}_2 \left(1 + \dfrac{\left(\sqrt{ZY}\right)^2}{2!} \right) \end{cases}$$

257

Linhas Médias

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{U}_2 \left(1 + \dfrac{ZY}{2} \right) + \dot{I}_2 Z_c \sqrt{ZY} \left(1 + \dfrac{ZY}{6} \right) \\ \dot{I}_1 = \dfrac{\dot{U}_2}{Z_c} \sqrt{ZY} \left(1 + \dfrac{ZY}{6} \right) + \dot{I}_2 \left(1 + \dfrac{ZY}{2} \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{U}_2 \left(1 + \dfrac{ZY}{2} \right) + \dot{I}_2 \sqrt{\dfrac{Z}{Y}} \sqrt{ZY} \left(1 + \dfrac{ZY}{6} \right) \\ \dot{I}_1 = \dot{U}_2 \sqrt{\dfrac{Y}{Z}} \sqrt{ZY} \left(1 + \dfrac{ZY}{6} \right) + \dot{I}_2 \left(1 + \dfrac{ZY}{2} \right) \end{cases}$$

258

EESC • USP

Linhas Médias

- Dessa forma, tem-se o seguinte conjunto de equações:

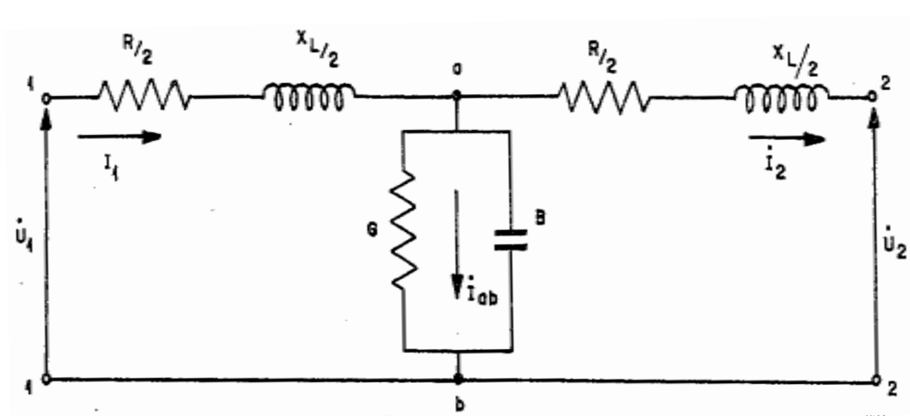
$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{U}_2\left(1+\dfrac{ZY}{2}\right)+\dot{I}_2 Z\left(1+\dfrac{ZY}{6}\right) \\ \dot{I}_1 = \dot{U}_2 Y\left(1+\dfrac{ZY}{6}\right)+\dot{I}_2\left(1+\dfrac{ZY}{2}\right) \end{cases}$$

259

EESC • USP

Linhas Médias – Modelo "T" Equivalente

- Vamos considerar o seguinte circuito equivalente: (Modelo "T" equivalente)



260

Linhas Médias – Modelo "T" Equivalente

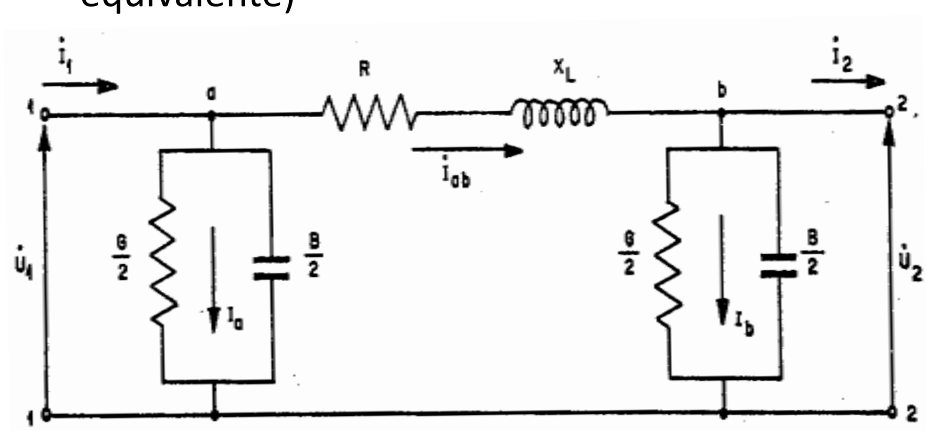
- O circuito equivalente anterior possui o seguinte conjunto de equações:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{U}_2\left(1+\dfrac{ZY}{2}\right)+\dot{I}_2 Z\left(1+\dfrac{ZY}{4}\right) \\ \dot{I}_1 = \dot{U}_2 Y + \dot{I}_2\left(1+\dfrac{ZY}{2}\right) \end{cases}$$

261

Linhas Médias – Modelo "Pi" Equivalente

- Outro circuito equivalente seria: (Modelo "Pi" equivalente)



262

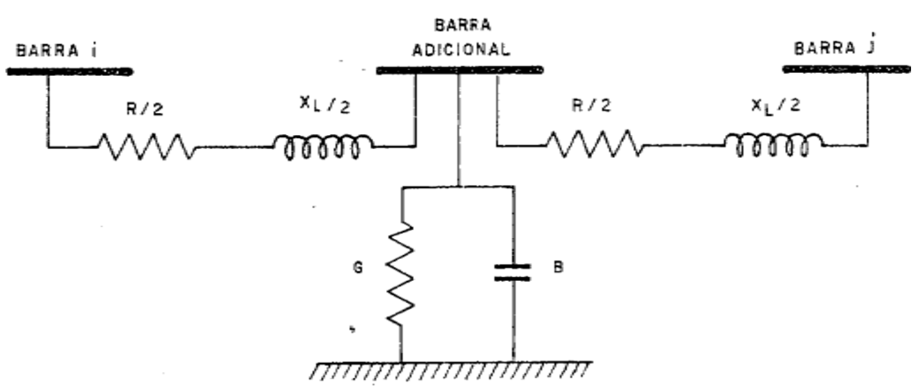
Linhas Médias – Modelo "Pi" Equivalente

- O circuito equivalente anterior possui o seguinte conjunto de equações:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{U}_2\left(1+\dfrac{ZY}{2}\right)+\dot{I}_2 Z \\ \dot{I}_1 = \dot{U}_2 Y\left(1+\dfrac{ZY}{4}\right)+\dot{I}_2\left(1+\dfrac{ZY}{2}\right) \end{cases}$$

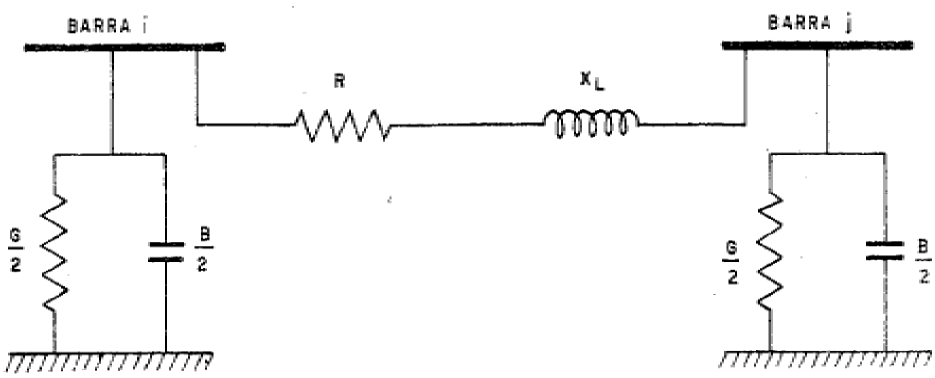
263

Diferenças Entre os Modelos de Linhas de Transmissão Para Inclusão em Modelos de Sistemas de Energia



264

Diferenças Entre os Modelos de Linhas de Transmissão Para Inclusão em Modelos de Sistemas de Energia



Linhas Longas

- Quando a representação do relacionamento entre as grandezas elétricas da linha não é possível de ser feito por meio dos dois primeiros termos da expansão das funções hiberbólicas a expressões exatas devem ser empregadas.
- Contudo, para fins de uso em modelos de sistemas de energia elétrica deve-se representar as linhas por meio de seu modelo equivalente.

EESC • USP

Linhas Longas

- Vamos considerar o modelo “Pi” equivalente (O qual será denominado por “Pi-Nominal” para se diferir daquele obtido quando do estudo de Linhas Médias):

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{U}_2 \left(1 + \dfrac{Z'Y'}{2} \right) + \dot{I}_2 Z' \\ \dot{I}_1 = \dot{U}_2 Y' \left(1 + \dfrac{Z'Y'}{4} \right) + \dot{I}_2 \left(1 + \dfrac{Z'Y'}{2} \right) \end{cases}$$

267

EESC • USP

Linhas Longas

- Comparando as equações do Circuito “Pi-Nominal” com as equações garais de linhas de transmissão, tem-se:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{U}_2 \cosh\left(\sqrt{ZY}\right) + \dot{I}_2 Z_c \operatorname{senh}\left(\sqrt{ZY}\right) \\ \dot{I}_1 = \dfrac{\dot{U}_2}{Z_c} \operatorname{senh}\left(\sqrt{ZY}\right) + \dot{I}_2 \cosh\left(\sqrt{ZY}\right) \end{cases}$$

268

EESC • USP

Linhas Longas

$$\begin{cases} \cosh\left(\sqrt{ZY}\right) = 1 + \dfrac{Z^{'}Y^{'}}{2} \\ Z_c \operatorname{senh}\left(\sqrt{ZY}\right) = Z^{'} \\ \dfrac{1}{Z_c} \operatorname{senh}\left(\sqrt{ZY}\right) = Y^{'}\left(1 + \dfrac{Z^{'}Y^{'}}{4}\right) \end{cases}$$

269

EESC • USP

Linhas Longas

- Determinando inicialmente $Y'/2$, tem-se:

$$\cosh\left(\sqrt{ZY}\right) = 1 + \frac{Z^{'}Y^{'}}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$Z^{'}\frac{Y^{'}}{2} = \cosh\left(\sqrt{ZY}\right) - 1$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{Y^{'}}{2} = \frac{1}{Z^{'}}\cosh\left(\sqrt{ZY}\right) - 1 \Rightarrow \frac{Y^{'}}{2} = \frac{1}{Z_c}\frac{\cosh\left(\sqrt{ZY}\right) - 1}{\operatorname{senh}\left(\sqrt{ZY}\right)}$$

270

EESC • USP

Linhas Longas

- Recordando que:

$$\begin{cases} \cosh(l\gamma) = \cosh^2(l\gamma/2) + \mathrm{senh}^2(l\gamma/2) \\ \mathrm{senh}(l\gamma) = 2\cosh(l\gamma/2)\mathrm{senh}(l\gamma/2) \end{cases}$$

- O que permite:

$$\frac{Y'}{2} = \frac{1}{Z_c}\frac{\cosh^2(l\gamma/2) + \mathrm{senh}^2(l\gamma/2) - 1}{2\cosh(l\gamma/2)\mathrm{senh}(l\gamma/2)}$$

271

EESC • USP

Linhas Longas

- Lembrando ainda que:

$$\cosh^2(l\gamma/2) - \mathrm{senh}^2(l\gamma/2) = 1$$

- Desenvolvendo, tem-se:

$$\frac{Y'}{2} = \frac{1}{Z_c}\frac{\cosh^2(l\gamma/2) + \mathrm{senh}^2(l\gamma/2) - \cosh^2(l\gamma/2) + \mathrm{senh}^2(l\gamma/2)}{2\cosh(l\gamma/2)\mathrm{senh}(l\gamma/2)}$$

$$\frac{Y'}{2} = \frac{1}{Z_c}\frac{2\,\mathrm{senh}^2(l\gamma/2)}{2\cosh(l\gamma/2)\mathrm{senh}(l\gamma/2)}$$

272

EESC • USP

Linhas Longas

$$\frac{Y'}{2}=\frac{1}{Z_c}\frac{\operatorname{senh}(l\gamma/2)}{\cosh(l\gamma/2)} \Rightarrow \frac{Y'}{2}=\frac{1}{Z_c}\tanh(l\gamma/2)$$

$$\frac{1}{Z_c}=\frac{1}{\sqrt{z/y}}=\frac{l\sqrt{zy}}{l\sqrt{zy}\cdot\sqrt{z/y}}=\frac{ly}{l\sqrt{zy}}=\frac{Y}{l\gamma}$$

$$\frac{Y'}{2}=\frac{Y}{l\gamma}\tanh(l\gamma/2)$$

$$\frac{Y'}{2}=\frac{2}{2}\frac{Y}{l\gamma}\tanh(l\gamma/2) \Rightarrow \boxed{\frac{Y'}{2}=\frac{Y}{2}\frac{\tanh(l\gamma/2)}{l\gamma/2}}$$

273

EESC • USP

Linhas Longas

$$Z'=Z_c\operatorname{senh}\left(\sqrt{ZY}\right)$$

$$Z'=\sqrt{\frac{Z}{Y}}\operatorname{senh}(l\gamma)$$

$$Z'=\sqrt{\frac{Z}{Y}}\frac{l\sqrt{zy}}{l\sqrt{zy}}\operatorname{senh}(l\gamma)$$

$$Z'=\sqrt{\frac{Z}{Y}}\frac{\sqrt{lz}\sqrt{ly}}{l\sqrt{zy}}\operatorname{senh}(l\gamma)$$

$$Z'=\sqrt{\frac{Z}{Y}}\frac{\sqrt{Z}\sqrt{Y}}{l\gamma}\operatorname{senh}(l\gamma)$$

$$\boxed{Z'=Z\frac{\operatorname{senh}(l\gamma)}{l\gamma}}$$

274

EESC • USP

Linhas Longas

- Pelos resultados anteriores é possível verificar que o circuito Pi-nominal (O circuito “T”-nominal também) representa adequadamente uma linha longa em regime permanente senoidal.
- Para tanto, os termos de impedância série e admitância *shunt* devem ser corrigidos pelos fatores determinados.
- Para valores pequenos de $l\gamma$ ambos os termos de correção tendem à unidade, ou seja, faz com que o circuito nominal tenda ao circuito equivalente (linhas médias).

275

EESC • USP

Linhas Longas

- Vamos considerar o modelo “T” equivalente (O qual será denominado por “T-Nominal” para se diferir daquele obtido quando do estudo de Linhas Médias):

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{U}_2\left(1+\dfrac{ZY}{2}\right)+\dot{I}_2 Z\left(1+\dfrac{ZY}{4}\right) \\ \dot{I}_1 = \dot{U}_2 Y + \dot{I}_2\left(1+\dfrac{ZY}{2}\right) \end{cases}$$

276

EESC • USP

Linhas Longas

- Comparando as equações do Circuito "T-Nominal" com as equações gerais de linhas de transmissão, tem-se:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{U}_2 \cosh\left(\sqrt{ZY}\right) + \dot{I}_2 Z_c \operatorname{senh}\left(\sqrt{ZY}\right) \\ \dot{I}_1 = \dfrac{\dot{U}_2}{Z_c} \operatorname{senh}\left(\sqrt{ZY}\right) + \dot{I}_2 \cosh\left(\sqrt{ZY}\right) \end{cases}$$

277

EESC • USP

Linhas Longas

$$\begin{cases} \cosh\left(\sqrt{ZY}\right) = 1 + \dfrac{Z^{'}Y^{'}}{2} \\ Z_c \operatorname{senh}\left(\sqrt{ZY}\right) = Z^{'}\left(1 + \dfrac{Z^{'}Y^{'}}{4}\right) \\ \dfrac{1}{Z_c} \operatorname{senh}\left(\sqrt{ZY}\right) = Y^{'} \end{cases}$$

278

EESC • USP

Linhas Longas

- Determinando inicialmente $Z'/2$, tem-se:

$$\cosh\left(\sqrt{ZY}\right)=1+\frac{Z'Y'}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$Y'\frac{Z'}{2}=\cosh\left(\sqrt{ZY}\right)-1$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{Z'}{2}=\frac{1}{Y'}\cosh\left(\sqrt{ZY}\right)-1 \Rightarrow \frac{Z'}{2}=Z_c\frac{\cosh\left(\sqrt{ZY}\right)-1}{\operatorname{senh}\left(\sqrt{ZY}\right)}$$

279

EESC • USP

Linhas Longas

- Recordando que:

$$\begin{cases}\cosh(l\gamma)=\cosh^2(l\gamma/2)+\operatorname{senh}^2(l\gamma/2)\\ \operatorname{senh}(l\gamma)=2\cosh(l\gamma/2)\operatorname{senh}(l\gamma/2)\end{cases}$$

- O que permite:

$$\frac{Z'}{2}=Z_c\frac{\cosh^2(l\gamma/2)+\operatorname{senh}^2(l\gamma/2)-1}{2\cosh(l\gamma/2)\operatorname{senh}(l\gamma/2)}$$

280

Linhas Longas

- Lembrando ainda que:

$$\cosh^2(l\gamma/2) - \text{senh}^2(l\gamma/2) = 1$$

- Desenvolvendo, tem-se:

$$\frac{Z^{'}}{2} = Z_c \frac{\cosh^2(l\gamma/2) + \text{senh}^2(l\gamma/2) - \cosh^2(l\gamma/2) + \text{senh}^2(l\gamma/2)}{2\cosh(l\gamma/2)\,\text{senh}(l\gamma/2)}$$

$$\frac{Z^{'}}{2} = Z_c \frac{2\,\text{senh}^2(l\gamma/2)}{2\cosh(l\gamma/2)\,\text{senh}(l\gamma/2)}$$

Linhas Longas

$$\frac{Z^{'}}{2} = Z_c \frac{\text{senh}(l\gamma/2)}{\cosh(l\gamma/2)} \Rightarrow \frac{Z^{'}}{2} = Z_c \tanh(l\gamma/2)$$

$$Z_c = \sqrt{z/y} = \frac{l\sqrt{zy}\cdot\sqrt{z/y}}{l\sqrt{zy}} = \frac{lz}{l\sqrt{zy}} = \frac{Z}{l\gamma}$$

$$\frac{Z^{'}}{2} = \frac{Z}{l\gamma}\tanh(l\gamma/2)$$

$$\frac{Z^{'}}{2} = \frac{2}{2}\frac{Z}{l\gamma}\tanh(l\gamma/2) \Rightarrow \boxed{\frac{Z^{'}}{2} = \frac{Z}{2}\frac{\tanh(l\gamma/2)}{l\gamma/2}}$$

Linhas Longas

$$Y' = \frac{1}{Z_c}\,\mathrm{senh}\left(\sqrt{ZY}\right)$$

$$Y' = \sqrt{\frac{Y}{Z}}\,\mathrm{senh}\left(l\gamma\right)$$

$$Y' = \sqrt{\frac{Y}{Z}}\,\frac{l\sqrt{zy}}{l\sqrt{zy}}\,\mathrm{senh}\left(l\gamma\right)$$

$$Y' = \sqrt{\frac{Y}{Z}}\,\frac{\sqrt{lz}\sqrt{ly}}{l\sqrt{zy}}\,\mathrm{senh}\left(l\gamma\right)$$

$$Y' = \sqrt{\frac{Y}{Z}}\,\frac{\sqrt{Z}\sqrt{Y}}{l\gamma}\,\mathrm{senh}\left(l\gamma\right)$$

$$\boxed{Y' = Y\,\frac{\mathrm{senh}\left(l\gamma\right)}{l\gamma}}$$

283